

Teoremas de Circuitos

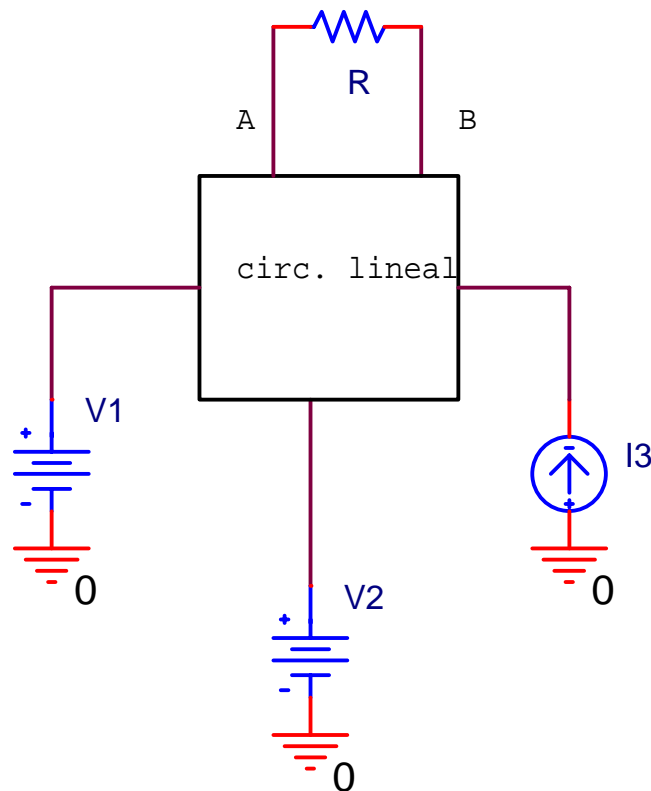
Existen varios métodos para simplificar la resolución de circuitos eléctricos y que son básicos para la aplicación de la Electrotecnia a otras disciplinas relacionadas como los circuitos electrónicos. Veremos a continuación cada uno de los más importantes teoremas y principios de circuitos.

1) Principio de superposición

Este principio, se basa en el concepto de linealidad y, consecuentemente es aplicable solamente a circuitos lineales que posean varias fuentes de tensión y/o corriente. Podríamos expresar el principio en forma sencilla del siguiente modo:

En un circuito excitado por dos o más fuentes que actúan simultáneamente, pueden obtenerse cada una de las tensiones y corrientes como la suma algebraica de respuestas a cada una de las excitaciones por separado, considerando al resto de las fuentes pasivadas.

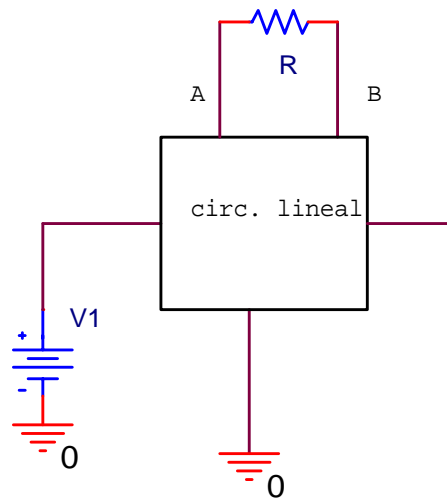
Analicemos el sistema dibujado a continuación.



Supongamos que deseamos determinar el valor de la corriente en la resistencia R_1 . Para ello, determinamos el valor de la corriente debida a la fuente V_1 , con las demás fuentes pasivadas, es decir eliminando su efecto. Por ejemplo, para eliminar el efecto de una fuente de tensión, hay que *anular esa tensión*, lo que se logra *cortocircuitando* el generador, ya que el cortocircuito, por poseer resistencia cero, es lo único que nos asegura tener tensión cero.

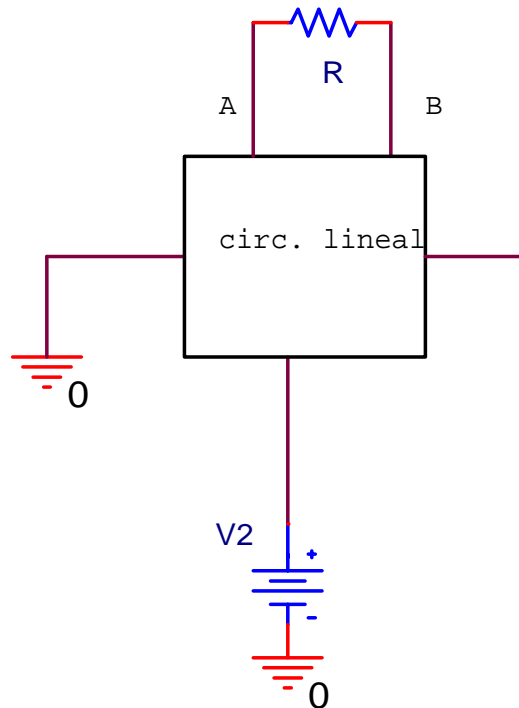
Por otra parte, pasivar el generador de corriente sólo será necesario abrir el circuito, es decir *remover* el generador.

Por lo tanto, aplicando estas ideas al esquema dibujado, quedará en primera instancia



Podemos así determinar la corriente debida al generador 1, con los demás pasivados, a la que llamaremos I_1 .

Luego pasivamos el segundo generador, quedando:



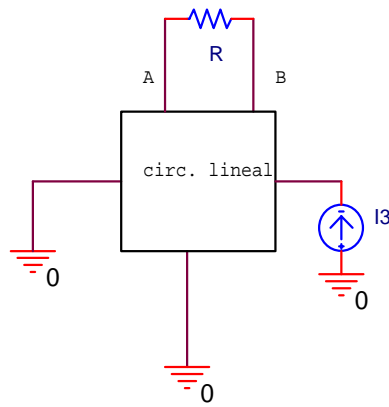
Determinamos ahora la I_2 .

Finalmente dejamos el tercer generador y pasivamos los otros dos, es decir, determinamos el valor de I_3

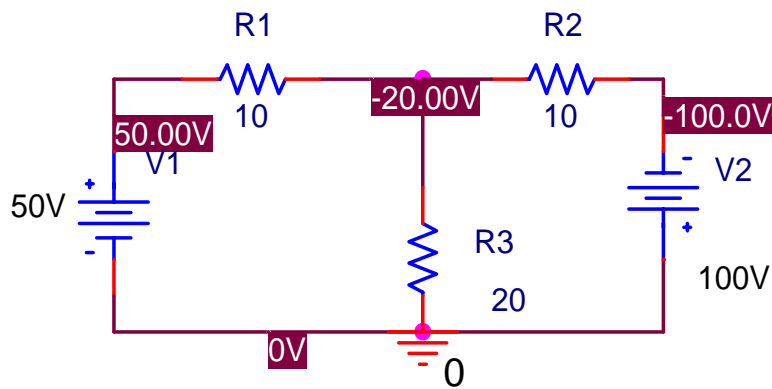
Podemos ahora obtener el resultado final sumando algebraicamente las corrientes calculadas, es decir

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Tratemos de fijar las ideas mediante un ejemplo

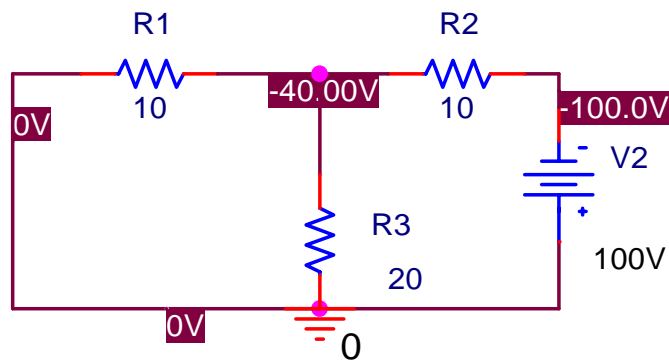


Ejemplo de superposición



Supongamos desear determinar el valor de la tensión en R_3 .

Primero pasivamos V_1 , es decir lo reemplazamos por un cable

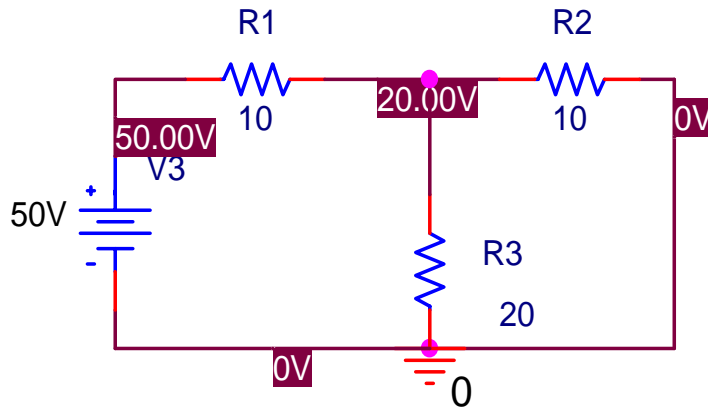


El resultado, aplicando los métodos sencillos de resolución es $V_1(R_3) = -40V$

Luego pasivamos el generador 2 y obtenemos el nuevo resultado $V_2(R_3) = 20V$

Por lo tanto el valor de la tensión en R_3 es la suma algebraica de ambos valores obtenidos:

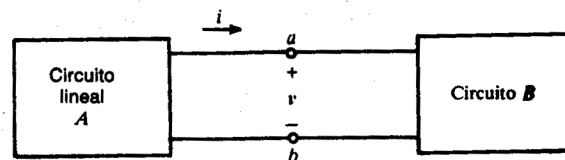
$V(R_3) = V_1(R_3) + V_2(R_3) = -40V + 20V = 20V$ como lo expresa el primer esquema dibujado.



2) Teoremas de Thévenin

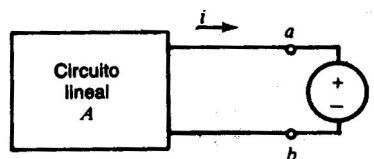
La idea del teorema de Thévenin es permitir la simplificación de un circuito complicado mediante un modelo equivalente constituido por una fuente y una resistencia, lo cual permitirá una resolución sencilla, especialmente cuando se requieran los resultados para varios valores de algún componente.

Para el análisis del teorema admitiremos que un circuito lo podemos separar en dos partes, una **A** que llamaremos *red lineal activa*, la que se tratará de un circuito constituido por fuentes de tensión y/o corrientes dependientes o independientes. La otra parte, **B**, la llamaremos *red externa* y no tiene ningún tipo de restricciones, es decir puede contener elementos no lineales. Finalmente, agregamos la restricción que cualquier fuente controlada, debe tener el elemento de control en la misma red

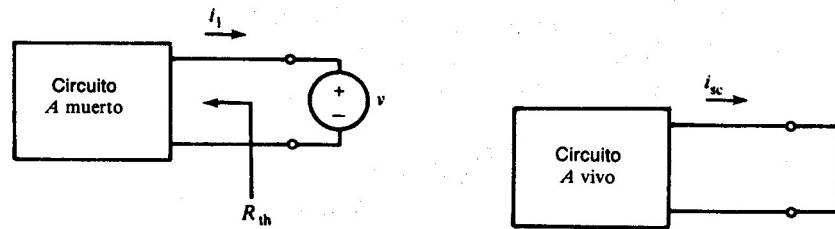


Demostraremos que podemos reemplazar el circuito lineal **A** (red lineal activa por un circuito equivalente formado por una fuente de tensión en serie con una resistencia, de modo que las tensiones y corrientes en la red externa **B**, permanecen inalteradas.

En primera instancia nosotros podemos reemplazar el circuito **B** por un generador cuyo valor sea v , sin que se altere el valor de la corriente i , ya que no ha cambiado la red lineal activa **A**, lo que se observa en la figura siguiente:

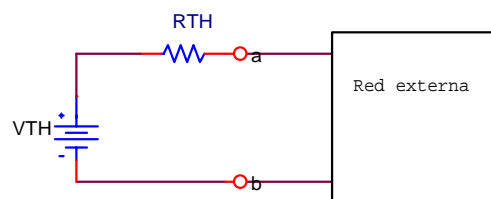


Este nuevo circuito obtenido, es una red *lineal* y por lo tanto, será aplicable el principio de superposición. Si aplicamos dicho principio visto anteriormente, podremos escribir $i = i_1 + i_{sc}$, donde i_1 es la corriente debida al generador v con la red lineal activa **A** pasivada, es decir con *todas las fuentes independientes pasivadas*. Por otra parte, i_{sc} es la *corriente de cortocircuito* (short circuit), que surge al analizar la red **A** con todos sus generadores *activos vivos* (sin pasivar) y el generador v pasivado, como se observa en la figura siguiente



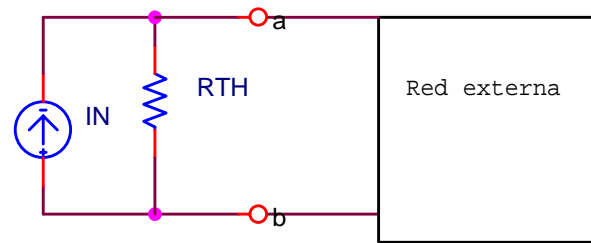
Puesto que las fuentes independientes están pasivadas en la red A, ésta se comportará como una resistencia a la que llamaremos *resistencia de Thévenin*, por lo que será lícito escribir $i_1 = -\frac{v}{R_{TH}}$, donde el signo menos aparece en virtud de los sentidos adoptados para la corriente i y el del generador de tensión v . Por lo tanto puede escribirse $i = -\frac{v}{R_{TH}} + i_{sc}$. Esta expresión al basarse en el principio de superposición para una red lineal, es válida para toda condición y una de ellas será la de *vacío*. En tal circunstancia los terminales de salida de la red lineal activa A estarán abiertos y la corriente consecuentemente será nula y la expresión devendrá en $0 = -\frac{v_{OC}}{R_{TH}} + i_{sc}$ donde v_{OC} es la tensión a circuito abierto (open circuit), Despe-

jando queda $i_{sc} = \frac{v_{OC}}{R_{TH}}$ y reemplazando $i = -\frac{v}{R_{TH}} + \frac{v_{OC}}{R_{TH}}$ y, finalmente, despejando el valor de v , obtenemos $v = v_{OC} - iR_{TH}$. De esta última expresión queda claro que la red lineal activa puede reemplazarse por un circuito equivalente formado por un generador de tensión en serie con una resistencia. La tensión es la de *circuito abierto* y la llamaremos *tensión de Thévenin* y la resistencia que se obtiene con la red A pasivada es la *resistencia de Thévenin*. En forma esquemática quedará



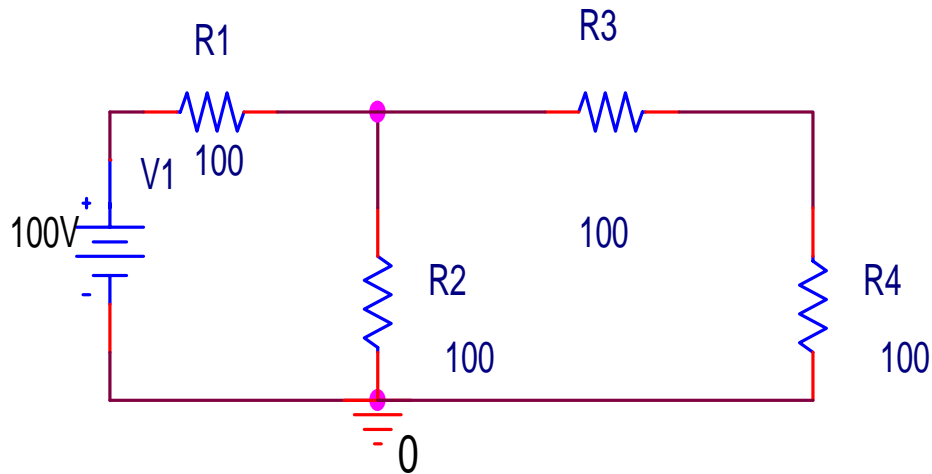
Este es entonces el famoso y útil *Teorema de Thévenin* en homenaje al ingeniero de telégrafos francés *Charles Thévenin* (1857 – 1926), quien publicó sus resultados en 1883, aunque en realidad quien lo explicó en forma restringida fue *Hermann Ludwing Hemholtz*, físico y médico alemán (1821 – 1894) en 1853.

En otro orden, analizando la expresión ya vista $i = -\frac{v}{R_{TH}} + i_{sc}$, podemos inferir que la podemos representar mediante un generador de *corriente* de valor igual a la corriente de *cortocircuito* y una resistencia en paralelo igual a la de Thévenin. A dicha corriente se la llama *corriente de Norton* y esta interpretación se denomina *teorema de Norton* en homenaje al ingeniero norteamericano homónimo y cuyo trabajo se publicó 50 años después que el de Thévenin. Finalmente el modelo equivalente de Norton quedará

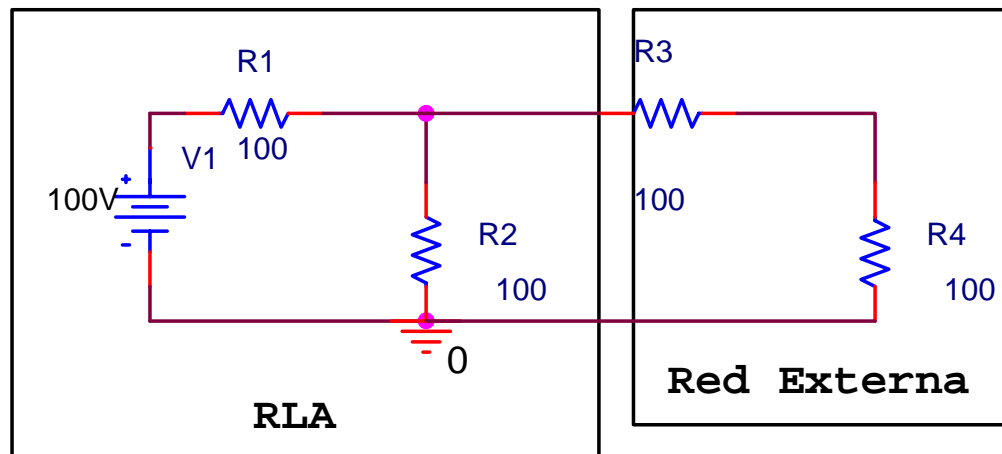


A continuación veremos un ejemplo:

Supongamos querer determinar el valor de la corriente en la resistencia R_4



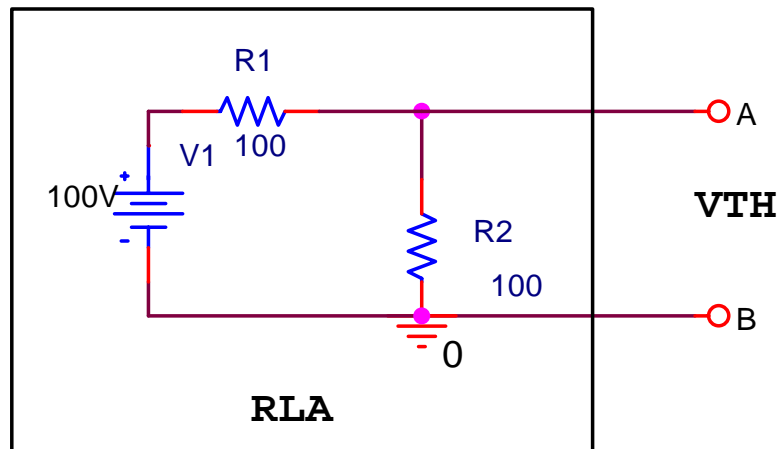
El primer paso consiste en dividir el circuito en la red lineal activa y en la red externa. Esto debe ser hecho en una forma conveniente, desde el punto de vista de la laboriosidad necesaria para obtener los valores del modelo equivalente. En este caso una posible buena opción es la indicada a continuación:



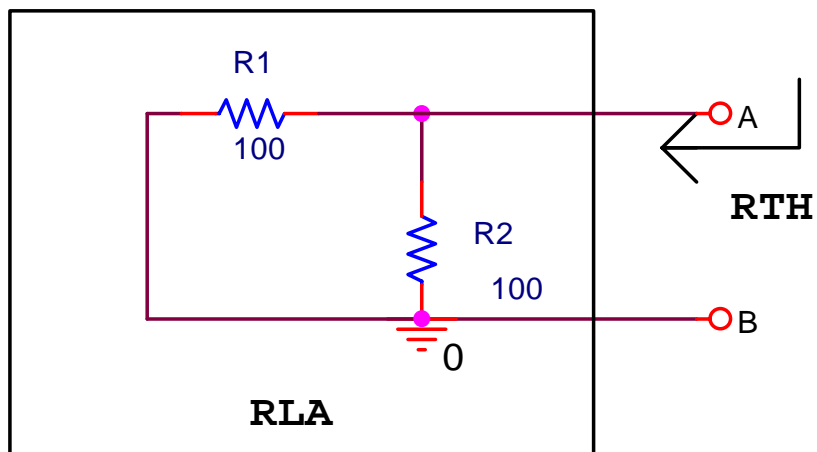
Deberemos por lo tanto determinar el valor de la tensión a circuito abierto (*tensión de Thévenin*), lo cual es muy sencillo en virtud que se trata de un divisor resistivo.

$$V_{TH} = V_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 100 \frac{100}{100 + 100} = 50V$$

Recordemos que el cálculo debe hacerse a circuito abierto



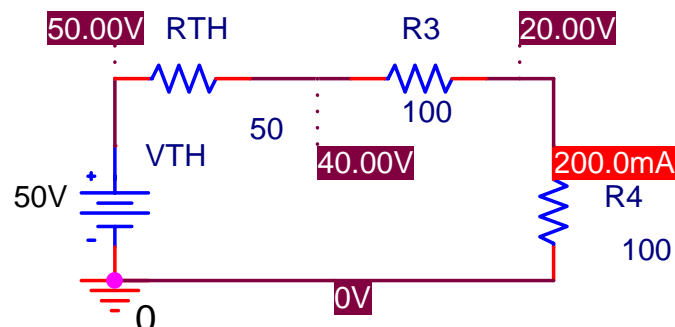
Ahora calcularemos el valor de la resistencia “vista” entre los bornes A B con los generadores de la RLA pasivados. También es muy sencillo en virtud que será el circuito formado por dos resistores en paralelo como se ve en el sig. gráfico



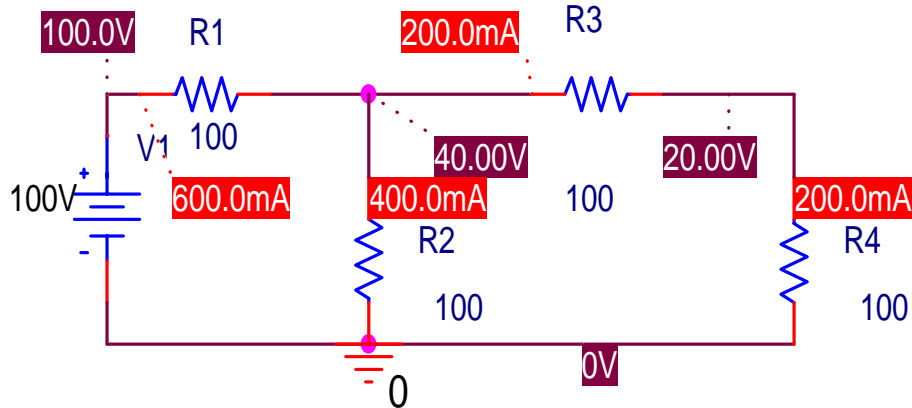
$$R_{TH} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 50\Omega$$

Finalmente reemplazamos la RLA por el modelo equivalente obtenido quedando el circuito de la figura siguiente con los valores indicados, donde la corriente en R_4 la obtenemos resolviendo el circuito serie

$$I_4 = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_3 + R_4} = \frac{50V}{50\Omega + 100\Omega + 100\Omega} = \frac{50V}{250\Omega} = 0.2A$$

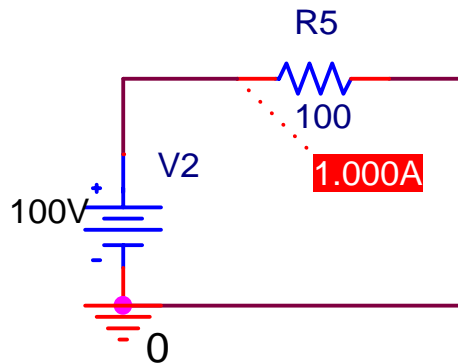


Si resolviéramos el circuito en la forma habitual, obtendríamos los resultados que pueden observarse en la figura siguiente:

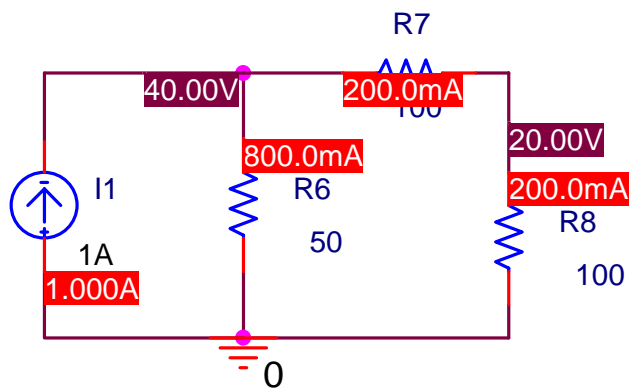


Si aplicamos el teorema de Norton debemos encontrar la corriente de cortocircuito que será la *corriente de Norton*. Con la misma división del circuito podemos obtener fácilmente dicha corriente mediante la ley de

$$\text{Ohm: } I_N = \frac{100\text{V}}{100\Omega} = 1\text{A}$$



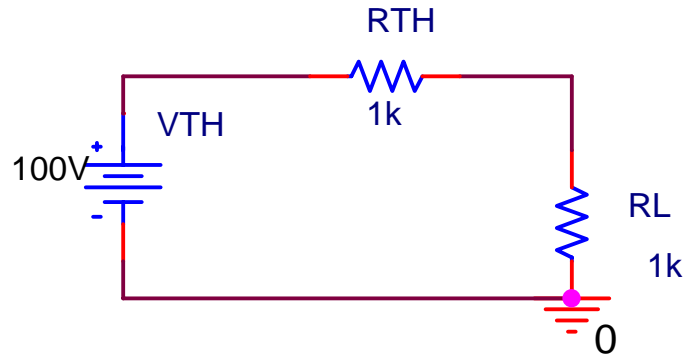
Por lo tanto, podemos reemplazar a la RLA por el modelo equivalente de Norton:



Como vemos tanto el modelo de Thévenin como el de Norton son equivalentes a la red lineal activa, de modo tal que tanto la corriente como la tensión sobre la red externa

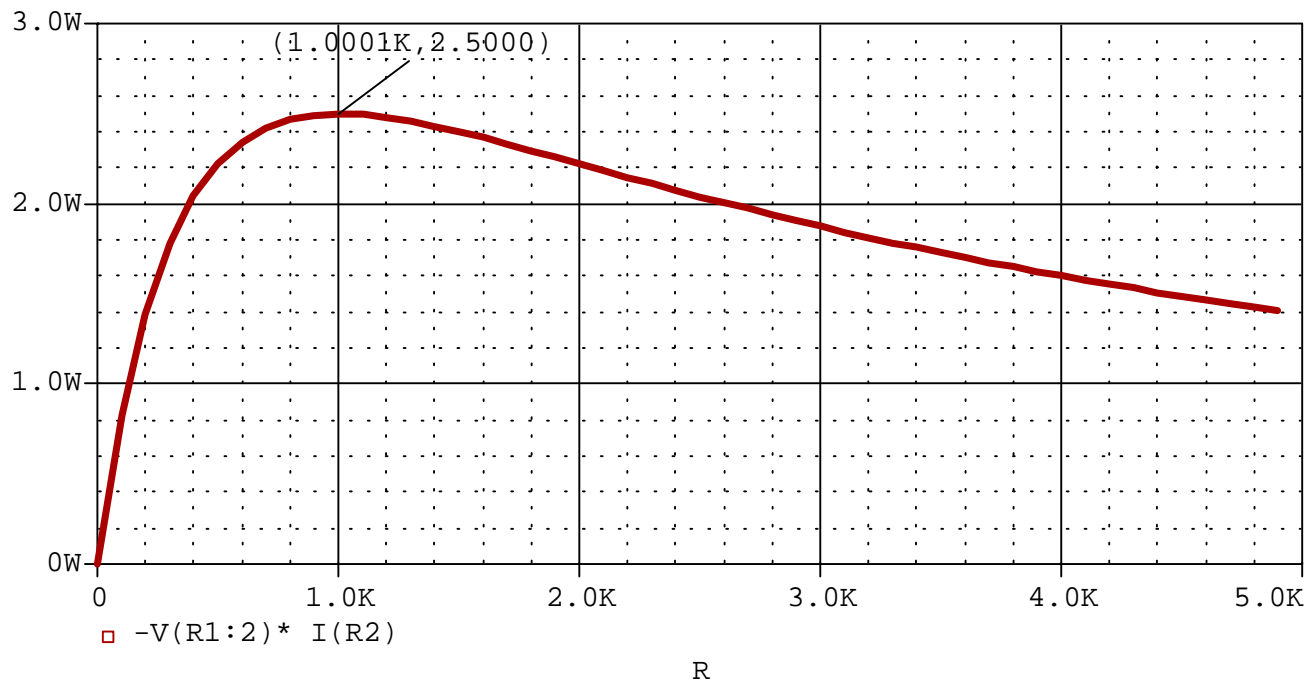
3) Teorema de máxima transferencia de potencia

Este teorema permite determinar el valor de la resistencia de carga necesario para que un generador real permita transferir la máxima potencia posible a dicha carga. Analicemos un sencillo circuito como el siguiente:



Podemos expresar el valor de la potencia en la carga de la siguiente forma: $P_L = I^2 R_L = \frac{V_{TH}^2}{(R_L + R_{TH})^2} R_L$

Si en la expresión anterior reemplazamos por los valores del circuito y realizamos una tabla de valores, obtendremos un gráfico como el que se presenta a continuación.



Observamos que hay un punto para el cual la potencia es *máxima* y esto ocurre cuando $R_L = R_{TH}$. Por lo tanto podríamos expresar el teorema de máxima transferencia de potencia diciendo que *la potencia transferida entre un generador real y una resistencia de carga será máxima cuando la resistencia del generador iguale a la de carga.*